

Exercices – Séquence n° 4 – SUITES (II) :

Comportement d'une suite géométrique (q^n)

Contenu

- Comportement d'une suite géométrique (q^n) où q est un réel.

Capacités

- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Raisonnement par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER**Exercice 1** [Ra-Ca]

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur terme général. Justifier.

$$\begin{array}{lll} 1) u_n = 4 \times \left(\frac{5}{8}\right)^n & 2) v_n = 10^{-3} - (\sqrt{2})^n & 3) w_n = \frac{(-3)^n}{5} \\ 4) x_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} + 1 & 5) y_n = 6^{n+2} - 7^n & 6) z_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} \end{array}$$

Exercice 2 [Ra-Ca]

(S_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(T_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{3^k}$

Déterminer, en justifiant, la limite de chacune des suites (S_n) et (T_n) .

Exercice 3 [Mo-Ra-Ca-Co]

Une entreprise a prévu de réduire son empreinte CO₂ de 6 % chaque année.
En 2020, elle émet 45 000 tonnes de CO₂.

- Modéliser cette situation à l'aide d'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ donnant la quantité de CO₂ émise, en milliers de tonnes, n années après 2020.
- Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Exprimer u_n en fonction de n .
- Quelle est la tendance, à long terme, des émissions de CO₂ de cette entreprise ?
- On note S_n la quantité totale de CO₂ émise, en milliers de tonnes, de 2020 à 2020+ n .
Quelle est la limite de la suite (S_n) ? Interpréter le résultat.

5) On souhaite déterminer quand la quantité de CO₂ émise sera inférieure à 10 000 tonnes.

- Pour cela, on utilise la fonction incomplète « seuil » ci-contre, écrite en langage Python.
Compléter ce programme pour qu'il réponde au problème posé.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer en quelle année la quantité de CO₂ émise sera inférieure à 10 000 tonnes.

```
1 from math import *
2 def seuil():
3     n=0
4     u=45
5     while .....:
6         n=.....
7         u=.....
8     return .....
```

6) On considère la fonction « pollution » ci-contre, écrite en langage Python.

- Que représentent les variables a et S ?
- Quel est le rôle de cette fonction « pollution » ?
- Programmer cette fonction sur la calculatrice.
Quel est le résultat affiché pour a = 25 ? Interpréter.

```
1 from math import *
2 def pollution(a):
3     n=0
4     u=45
5     S=45
6     while n<a:
7         n=n+1
8         u=0.94*u
9         S=S+u
10    return S
```

Exercice 4 [Mo-Ra-Ca-Co]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) dans la feuille de calcul ci-contre :

- Donner une formule qui, saisie en cellule B4 puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs des termes de la suite (u_n) dans la colonne B.
- Compléter les cellules B4 à B7 en donnant des valeurs approchées à 10^{-3} près.
- Que peut-on conjecturer quant au comportement à l'infini de la suite (u_n) ?
- On considère les suites (v_n) et (w_n) définies, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7$$

- Démontrer que la suite (v_n) est constante.
- En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.
- Démontrer que la suite (w_n) est géométrique et préciser ses caractéristiques.
- En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ puis déterminer la limite de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

Exercice 5 [Mo-Ra-Co]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)u_n$.

Pour tout entier naturel n , on définit la suite (v_n) par : $v_n = (n+1)u_n$.

- La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs, arrondies au cent-millième, des premiers termes des suites (u_n) et (v_n) . Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on saisir en cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de la suite (u_n) ?
- Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n puis démontrer la conjecture.
- Déterminer alors la limite de la suite (v_n) .

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,00000	1,00000
3	1	0,25000	0,50000
4	2	0,08333	0,25000
5	3	0,03125	0,12500
6	4	0,01250	0,06250
7	5	0,00521	0,03125
8	6	0,00223	0,01563
9	7	0,00098	0,00781
10	8	0,00043	0,00391
11	9	0,00020	0,00195

Exercice 6 [Ch-Ra-Ca-Co]

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 3 \end{cases}$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Que fait précisément le programme ci-dessous écrit en langage Python ?
- 3) A l'aide de la calculatrice, que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la limite de la suite (u_n) ?
- 4) Par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 5$.
- 5) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

```
1 from math import *
2 def suite():
3     u=5
4     L=[u]
5     for i in range(1,10):
6         u=1.5*u-3
7         L=L+[u]
8     return L
```

Pour les questions suivantes, on pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 6$.

- 6) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 7) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 6 - \left(\frac{3}{2}\right)^n$.
- 8) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- 9) On souhaite déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n < -10^6$.
 - a. Compléter sur l'**annexe** les lignes 3 à 8 de la fonction « seuil » écrite en langage Python pour qu'elle réponde à ce problème.
 - b. À l'aide de la calculatrice, répondre à ce problème.
- 10) Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Exprimer, pour tout entier naturel n , S_n en fonction de n .

Exercice 7 [Ch-Ra-Ca-Co]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

Le but de cet exercice est de déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Partie A : Conjectures

- 1) Calculer, en détaillant, u_1 et u_2 .
- 2) La feuille de calcul suivante présente les dix premiers termes de la suite (u_n) .

Les valeurs ont éventuellement été approchées au millième près.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	u_n	5,000	3,000	2,500	2,286	2,174	2,110	2,070	2,046	2,030	2,020

Donner une formule qui, saisie dans la cellule C2, puis recopiée vers la droite, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) sur la ligne 2.

- 3) Que peut-on conjecturer concernant le comportement (variations et convergence) de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

Dans cette partie, on considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

- 4) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et préciser son premier terme.
- 5) En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis l'expression de u_n en fonction de n .
- 6) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Partie C : Algorithmique

- 7) Recopier et compléter les lignes 5, 6, 7 et 8 de la fonction « seuil » écrite en langage Python pour qu'elle calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 2,001$.
- 8) À l'aide de la calculatrice, déterminer cette plus petite valeur de n cherchée.

```

rad      PYTHON      shift
1 from math import *
2 def seuil():
3     n=0
4     u=5
5     while.....:
6         n=.....
7         u=.....
8     return .....
```

Exercice 8 [Ch-Ra-Ca-Co] Bac, Asie juin 2025**Partie A :**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

- 1) Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
- 2) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- 3) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
- 4) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- 5) Étudier les variations de la suite (u_n) .
- 6) Déterminer la limite de la suite (u_n) . Justifier la réponse.

Partie B :

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

- 1) Montrer que $w_1 = 44,5$.

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-contre une proposition pour cette fonction suite.

```

1 def suite(n) :
2     U=30
3     W=45
4     for i in range (1,n+1) :
5         U=U/2+10
6         W=W/2+U/2+7
7     return W
```

- 2) L'exécution de suite(1) ne renvoie pas le terme w_1 . Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de suite(n) renvoie la valeur du terme w_n ?

- 3) a. Montrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n , on a :

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

- b. On admet que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $0 \leq 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$.

Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

Pour réviser

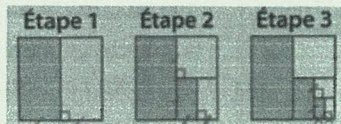
EXERCICES DU MANUEL :

- Exercices 71 à 78 page 32 et exercices 114 à 120 pages 35 et 36.

Pour aller plus loin

Exercice 9 [Mo-Ra-Ca-Co]

À partir d'un carré de côté 1, on construit successivement les rectangles colorés ci-contre. À chaque étape, on construit un nouveau rectangle dont les côtés ont pour longueur la moitié des longueurs des côtés du rectangle ajouté à l'étape précédente.



On note S_n l'aire, en unité d'aire, de la surface colorée à l'étape n , où $n \geq 1$.

- 1) Conjecturer géométriquement la limite de la suite (S_n) .
- 2) Modéliser par une suite (a_n) l'aire, en unité d'aire, du rectangle ajouté à l'étape n , pour tout $n \geq 1$.
- 3) En déduire, pour tout $n \geq 1$, S_n en fonction de n , puis déterminer la limite de la suite (S_n) . Interpréter.

- 4) La fonction « seuil » écrite en langage Python ci-contre, renvoie l'étape n et l'aire S de la surface colorée telles que S diffère de $\frac{2}{3}$ de moins de 10^{-p} où $p \in \mathbb{N}$.

Compléter ce programme, le saisir sur la calculatrice.

Puis, l'exécuter pour $p = 3$.

Quelles sont les valeurs renvoyées ? Interpréter.

```
def seuil(p):
    n=1
    S=...
    while ...:
        n=n+1
        S=S+...
    return n,S
```

Exercice 10 [Ch-Mo-Ra-Ca-Co]

La figure ci-contre représente une suite de disques. Le plus grand a un rayon de 1 cm.

Chaque disque suivant a un rayon égal à la moitié du rayon du disque précédent.



Déterminer l'aire du domaine délimité par tous ces disques lorsqu'on continue cette construction indéfiniment.

Exercice 11 [Mo-Ra-Ca-Co]

L'objet de cet exercice est l'étude de flux de populations entre trois zones géographiques :

une ville notée A, une zone périphérique notée B et une zone de campagne notée C.

Pour modéliser les flux de population, on fait les hypothèses suivantes :

- La population totale des trois zones **reste constante**.
- Chaque année, la zone A perd 10 % de sa population, mais accueille 10 % de la population de la zone B et 1 % de la population de la zone C.
- Chaque année la zone B perd 10 % de sa population, mais accueille 10 % de la population de la zone A et 1 % de la population de la zone C.
- Chaque année la zone C perd 2 % de sa population.

Au 1^{er} janvier 2020, la zone A comptait 5 000 habitants, la zone B en comptait 2 000 et la zone C en comptait 4 000.

On désigne par a_n , b_n et c_n les nombres d'habitants respectifs des zones A, B et C au premier janvier de l'année 2020 + n .

On admettra, pour l'étude mathématique, que les nombres réels a_n , b_n et c_n peuvent ne pas être entiers.

Partie A : modélisation et conjectures

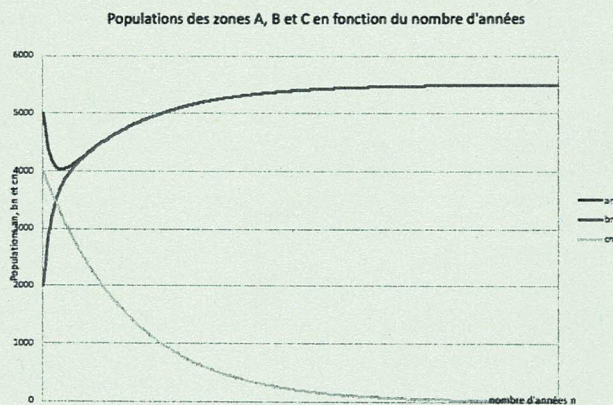
Dans cette question, on souhaite décrire, avec le modèle ci-dessus, l'évolution des trois populations.

1) Modéliser la situation :

- en donnant les valeurs de a_0, b_0 et c_0 ;
- en exprimant a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .

2) À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul et la représentation graphique suivantes :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	5000	2000	4000
3	1	4740	2340	3620
4	2	4539	2619	3642
5	3	4385	2850	3765
6	4	4270	3041	3699
7	5	4184	3201	3616
8	6	4122	3335	3543
9	7	4078	3449	3473
10	8	4050	3547	3403
11	9	4034	3631	3335
12	10	4027	3705	3266
13	11	4027	3770	3203
14	12	4034	3827	3139
15	13	4044	3879	3076
16	14	4059	3927	3015
17	15	4078	3970	2954
18	16	4095	4010	2895
19	17	4115	4046	2837
20	18	4137	4083	2781
21	19	4159	4116	2725
22	20	4182	4147	2670
23	21	4205	4178	2617
24	22	4229	4207	2565
25	23	4252	4234	2513
26	24	4276	4261	2463
27	25	4299	4287	2414
28	26	4322	4313	2366
29	27	4344	4337	2318
30	28	4367	4361	2272
31	29	4389	4384	2226
32	30	4411	4407	2182
33	31	4432	4429	2138
34	32	4453	4451	2096
35	33	4474	4472	2054



- a. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 et recopiée vers le bas pour remplir la colonne B ?
- b. D'après la représentation graphique, quelles conjectures peut-on émettre concernant l'évolution de chaque population à long terme ?

Partie B : démonstrations

On définit la suite (d_n) sur $\mathbb{N}$ par $d_n = a_n - b_n$ et la suite (e_n) sur $\mathbb{N}$ par $e_n = a_n + b_n$.

- 3) Exprimer les termes généraux des suites (d_n) et (e_n) de manière explicite (en fonction de n).
- 4) En déduire les limites des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) et interpréter les résultats.